

一类非线性系统降维观测器设计

徐明跃^{1,2}, 胡广大¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨师范大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 讨论了一类非线性系统的降维观测器设计问题. 借助于微分中值定理, 给出了一类非线性系统降维观测器存在的充分条件. 该条件是以线性矩阵不等式的形式给出的. 而且观测器设计方法不仅适用于可微 Lipschitz 非线性系统, 还适用于可微非 Lipschitz 的非线性系统. 最后给出了两个仿真算例以验证所给方法的效果.

关键词: 非线性系统; 观测器设计; 线性矩阵不等式 (LMI); 微分中值定理

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2010)04-0058-06

Reduced-order Observer Design for a Class of Nonlinear Systems

XU Ming-yue^{1,2}, HU Guang-da¹

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. School of Mathematics, Harbin Normal University, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, the reduced-order observer design for a class of nonlinear systems is investigated. Based on the differential mean value theorem (DMVT), we propose sufficient conditions for the existence of reduced-order observer of the class of nonlinear systems. The proposed sufficient conditions are given in terms of linear matrix inequalities (LMIs). In addition, the present approach is applicable not only to the differential Lipschitz nonlinear systems (DLSs) but also to some nonlinear systems which are not usual Lipschitz nonlinear systems. Some examples are given to illustrate the proposed approach.

Key words: nonlinear system; observer design; linear matrix inequality (LMI); differential mean value theorem (DMVT)

0 引言

近年来,非线性系统观测器设计问题一直是国内外学者研究的热点. 对于许多非线性系统观测器的设计,其充分条件大多是利用 Lipschitz 常数 γ 给出的. 然而,在许多情况下,基于 Lipschitz 常数所得到的(观测器设计的)充分条件会增加保守性. 其原因在于 γ 不能够充分反映出系统非线性部分对动态误差的影响(见文 [1]、[2]、[3]). 即使研究的是

一类 Lipschitz 非线性系统,文 [4]、[5] 和 [6] 给出的方法也是保守的,原因在于我们总是要解下列不等式

$$P(A - KC) + (A - KC)^T P + \gamma^2 PP + I < 0 \quad (1)$$

这就要求 $A - KC$ 的稳定性. 然而,如果对于任意矩阵 K , $A - KC$ 不是稳定的,上述不等式则是无解的. 文 [7-9] 和文 [8] 中通过使用单边 Lipschitz 和拟单边 Lipschitz 条件,给出了非线性系统观测器设计的新方法. 然而,该方法得到的矩阵不等式在很多情况下并不是线性矩阵不等式. 往往只能求具有某种

特殊结构的正定解 P , 而这样又会降低 P 存在的可能性(见文 [8]). Zemouche 等在文 [1] 中讨论了一类可微 Lipschitz 非线性系统, 并且给出了该系统存在观测器的充分条件, 同时该方法也能够弥补由 γ 产生的不足. 可是我们不能利用文 [1] 中的方法来设计非 Lipschitz 的非线性系统. 在文 [2] 和 [0] 中, 对于一些单调非线性系统, 作者给出了其全局收敛的观测器设计方法. 本文中, 对于一类非线性系统, 给出了其全局收敛的降阶观测器设计方法, 该方法不仅适用于可微 Lipschitz 非线性系统, 也同样适用于某些非 Lipschitz 系统.

非线性系统的状态观测器可分为全阶观测器和降阶观测器两种. 降阶观测器只估计系统的部分状态变量, 这些变量不能从输出中直接测量. 由于降阶观测器的维数比全维观测器的维数低, 因此, 构造观测器时可以用较少的积分仪并且整个控制系统更简单. 一般来说, 非线性观测器设计方法有两种: 第一种方法基于非线性状态变换, 借助于此变换可将原系统动态误差线性化, 从而利用线性方法完成观测器设计(见文 [2, 13, 19]); 第二种方法则不需要这种变换而是直接基于初始系统(如文 [2-5]、[7]、[8-11]、[4-18]、[20]、[21]).

1 理论基础

本文中, 考虑如下形式的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Phi(x, y, u) \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 且 $\Phi(x, y, u): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是非线性的并且对 x 是可微的.

1) 对于方阵 $S, S > 0 (S < 0, S \leq 0)$ 表示该矩阵是正定的(负定的, 半正定的);

2) $Co(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$

3) E_{ij} 表示 $n \times n$ 矩阵, 其中第 i 行第 j 列元素是 1 其余元素是 0;

4) 将对称正定阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 进行如下形式的分块:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{pmatrix}$$

其中: $P_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}; P_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}; P_3 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$.

5) 将系统(2)中的状态阵 A 分块如下:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中, $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}; A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}; A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}; A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$.

本文中, 假定 C 是行满秩的.

定义 1 称 $\Phi(x, y, u)$ 为具有 Lipschitz 常数 γ 的 Lipschitz 函数, 如果

$$\|\Phi(x, y, u) - \Phi(\hat{x}, y, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\| \quad (3)$$

$x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m$.

称 $\Phi(x, y, u)$ 为具有单边 Lipschitz 常数 ν_p 的单边 Lipschitz 函数, 如果

$$\langle P\Phi(x, y, u) - P\Phi(\hat{x}, y, u), x - \hat{x} \rangle \leq \nu_p \|x - \hat{x}\|^2 \quad (4)$$

$x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, \nu_p$ 是依赖于矩阵 P 的常数.

先给出一些本文将要用到的已有文献中的结果. 非线性系统(2)的全阶观测有如下形式:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(\hat{x}, y, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (5)$$

观测器误差方程为:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + \Phi(x, y, u) - \Phi(\hat{x}, y, u) \quad (6)$$

其中 $\tilde{x} = x - \hat{x}$.

下面几个引理详见文 [5-16, 18, 20, 21].

引理 1 文 [5-16] 考虑系统(2)、(3). 如果存在增益矩阵 K 使得下列不等式

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + \gamma^2 PP + I < 0 \quad (7)$$

存在对称正定解 P , 其中 γ 是 $\Phi(x, y, u)$ 的 Lipschitz 常数. 则式(5)是系统(2)的渐近估计.

引理 2 文 [20] 如果 $C = (I_p \ 0)$ 并且满足引理 1 的条件, 即存在增益矩阵 K 使得不等式(7)存在对称正定解 P , 其中 γ 是 $\Phi(x, y, u)$ 的 Lipschitz 常数, 则满足 Lipschitz 条件(3)的系统(2)具有如下形式的降阶观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_2 = (A_{22} + LA_{12})\hat{z}_2 + [L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L]y + (L \ I_{n-p})\Phi\left(\begin{pmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{pmatrix}, y, u\right) \\ \hat{z}_1 = \hat{x}_1 = y \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_2 - Ly \end{cases} \quad (8)$$

其中 $L = P_3^{-1}P_2^T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$.

下面的引理将要说明 C 的这种 $(I_p \ 0)$ 形式并非必要的.

引理 3 文 [20] 对于系统(2)、(3), 如果矩阵 C 是行满秩的, 并且存在增益阵 K 使得不等式(7)存在对称正定解 P , 则系统(2)有形如(5)的全阶观测器和具有如下形式的降阶观测器:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{z}_1 = S^{-1}y \\ \hat{z}_2 &= (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{z}_2 + \bar{L}(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{L}) + \\ &\quad \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{L} S^{-1}y + (\bar{L}S^{-1}C + D)\Phi \times \\ &\quad (C^T S^{-T}S^{-1}y + D^T(\hat{z}_2 - \bar{L}S^{-1}y), y, u) \\ \hat{x} &= C^T S^{-T}S^{-1}y + D^T(\hat{z}_2 - \bar{L}S^{-1}y) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中, $\bar{L} = \bar{P}_3^{-1}\bar{P}_2^T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$.

$S, D, \bar{A}_{ij}$ 和 $\bar{P}_i$ 在文 [20] 中均有定义.

引理4 文 [8] 考虑系统(2) 满足单边 Lipschitz 条件(4). 若 $C = (I_p \ 0)$, 并且存在增益阵 K 使得下列不等式存在对称正定解 P , 则非线性系统(2) 有形如(5)的全阶观测器和形如(8)的降阶观测器:

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + 2\nu_p I < 0 \quad (10)$$

下面的引理将要说明 C 的这种 $(I_p \ 0)$ 形式不是必要的.

引理5 文 [8] 考虑系统(2) 满足单边 Lipschitz 条件(4). 如果矩阵 C 是行满秩的, 并且存在增益阵 K 使得不等式(10) 存在对称正定解 P , 则非线性系统(2) 有形如(5)的全阶观测器和形如(9)的降阶观测器.

引理6 文 [21] (向量函数的微分中值定理) 令 $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 且 $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$. 假设 $f(x)$ 在 $Co(x, \hat{x})$ 上是可微的. 则存在常值向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in Co(x, \hat{x})$, $\eta_i \neq x, \eta_i \neq \hat{x}$ ($i = 1, \dots, n$) 使得下式成立:

$$f(x) - f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\eta_1), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\eta_1), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\eta_1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\eta_2), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\eta_2), & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\eta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\eta_n), & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\eta_n), & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\eta_n) \end{pmatrix} (x - \hat{x}) \quad (11)$$

2 主要结论

在这一节中, 给出了本文的主要结论. 和一类非线性系统降阶观测器存在的充分条件.

假设系统(2) 的非线性部分具有如下形式:

$$\Phi(x, y, u) = (\Phi_1(x, y, u), \Phi_2(x, y, u), \dots, \Phi_n(x, y, u))^T \quad (12)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\Phi_i(x, y, u)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 对 x 可微, 且对所有的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ 都满足

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &\leq \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x, y, u) \leq b_{ij}, \\ (1 \leq i \leq n, j = p+1, p+2, \dots, n) \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x, y, u) &\in (-\infty, +\infty), \\ (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

注意, 满足条件(12) - (13) 的函数 $\Phi(x, y, u)$ 未必是 Lipschitz 的. 特别的, 若存在 $\{c_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 和 $\{d_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 使得对任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ 有下列不等式成立

$$c_{ij} \leq \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x, y, u) \leq d_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

则系统(2) 就变为了一般的可微 Lipschitz 非线性系统.

现我们引入下述记号:

1) 对于任意的 $\vartheta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, y, u)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$, 令

$$\dot{\Phi}_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{p+1}}(\eta_1, y, u), & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{p+2}}(\eta_1, y, u), & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(\eta_1, y, u) \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{p+1}}(\eta_2, y, u), & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{p+2}}(\eta_2, y, u), & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(\eta_2, y, u) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_{p+1}}(\eta_n, y, u), & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_{p+2}}(\eta_n, y, u), & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(\eta_n, y, u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$2) \dot{\Phi}_{ij}(\vartheta) = E_{ii} \dot{\Phi}_\vartheta E_{jj},$$

$$3) D = \{\mu = (\mu_{1p+1}, \mu_{1p+2}, \dots, \mu_{1n}, \dots, \mu_{nn}) : a_{ij} \leq \mu_{ij} \leq b_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = p+1, \dots, n\},$$

$$4) D_B = \{\nu = (\nu_{1p+1}, \nu_{1p+2}, \dots, \nu_{1n}, \dots, \nu_{nn}) : \nu_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\}, i = 1, 2, \dots, n; j = p+1, \dots, n\},$$

5) 对于正定阵 P , 令

$$F_p(\mu) = (A - KC)^T P + P(A - KC) +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n \mu_{ij} (P E_{ij} + E_{ji} P), \mu \in D.$$

先给出两个重要命题.

命题1 对于正定阵 P , 当且仅当 $F_p(\nu) < 0$ ($\forall \nu \in D_B$) 时有 $F_p(\mu) < 0$ ($\forall \mu \in D \supset D_B$).

证明: 因为 $F_p(\nu)$ 对于 $\nu \in D$ 是仿射的. 由于文 [1] 的凸性原理该命题得证.

引理2 和引理4 分别在文 [20] 和 [8] 中得到了证明. 通过研究其证明过程可以发现, 这两个引理的证明都要用到坐标变换 $z = (z_1^T, z_2^T)^T = Tx$, 其中

$$T = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ L & I_{n-p} \end{pmatrix}, z_1 = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)^T = y \in \mathbb{R}^p \text{ 并}$$

且 $L = P_3^{-1} P_2^T$. 从证明过程中,还可以得到下列命题:

命题2 如果 $C = (I_p \ 0)$ 且对于任意的 $\tilde{x} = (0, \dots, 0, \tilde{x}_{p+1}, \tilde{x}_{p+2}, \dots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$ 且 $u \in \mathbb{R}^m$, 记 $\tilde{\Phi} = \Phi(x, y, u) - \Phi(\hat{x}, y, u)$. 若存在增益矩阵 K 及对称正定阵 P 使不等式

$$\tilde{x}^T [A - KC]^T P + P[A - KC] \tilde{x} + 2 \langle P \tilde{\Phi}, \tilde{x} \rangle < 0 \quad (15)$$

成立,则由降阶观测器(8)决定的估计误差 $(\tilde{x}_{p+1}, \tilde{x}_{p+2}, \dots, \tilde{x}_n)^T$ 渐近趋于零.

证明: 令 $x_* = (\tilde{x}_{p+1}, \tilde{x}_{p+2}, \dots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^{n-p}$, 则式(15)的第二行第二列矩阵块为

$$\tilde{x}_*^T [P_3(A_{22} + LA_{12}) + (A_{22} + LA_{12})^T P_3] \tilde{x}_* + 2\tilde{x}_*^T P_3(L \ I_{n-p}) \Phi < 0 \quad (16)$$

其中

$$L = P_3^{-1} P_2^T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p} \quad (17)$$

利用坐标变换 $z = Tx$, 其中 $T = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ L & I_{n-p} \end{pmatrix}$. 令 $z =$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, 其中 $z_1 = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T = y \in \mathbb{R}^p$ 且 $z_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$.

则根据系统(2),可以得到

$$\dot{z}_2 = (A_{22} + LA_{12}) z_2 + [L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L] y + (L \ I_{n-p}) \Phi \left(\begin{pmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{pmatrix}, u \right) \quad (18)$$

从式(18)中减去式(8)的第一个等式,则

$$\dot{\tilde{z}}_2 = (A_{22} + LA_{12}) \tilde{z}_2 + (L \ I_{n-p}) \Phi$$

其中

$$\tilde{\Phi} = \Phi \left(\begin{pmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{pmatrix}, y, u \right) - \Phi \left(\begin{pmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{pmatrix}, y, u \right).$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V = \tilde{z}_2^T P_3 \tilde{z}_2,$$

其导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{z}_2^T [P_3(A_{22} + LA_{12}) + (A_{22} + LA_{12})^T P_3] \tilde{z}_2 + \\ &2\tilde{z}_2^T P_3(L \ I_{n-p}) \tilde{\Phi} = \tilde{x}_*^T [P_3(A_{22} + LA_{12}) + \\ &(A_{22} + LA_{12})^T P_3] \tilde{x}_* + 2\tilde{x}_*^T P_3(L \ I_{n-p}) \tilde{\Phi} < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

所以, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_2 = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_* = 0$.

注1 令 $D_B = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l\}$. 显然, $l \leq 2^{n(n-p)}$. 应当注意到当存在 (i, j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = p+1, p+2, \dots, n$) 使得 $a_{ij} = b_{ij}$ 时 $l < 2^{n(n-p)}$. $F_p(\mu)$ 可以整

理成下列形式:

$$F_p(\mu) = PA - WC + A^T P - C^T W^T + \sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n \mu_{ij} (PE_{ij} + E_{ji}^T P), \mu \in D \supset D_B \quad (20)$$

其中, $W = PK$.

定理1 假设系统(2)的非线性项 $\Phi(x, y, u)$ 满足条件(13). 若 $C = (I_p \ 0)$ 且存在增益矩阵 K 使得线性矩阵不等式(LMI):

$$\text{diag}(p(\nu_1), p(\nu_2), \dots, p(\nu_l)) < 0 \quad (21)$$

存在对称正定解 P , 其中 $\nu_i \in D_B$ ($i = 1, 2, \dots, l$), $F_p(\nu)$ ($\nu \in D_B$) 具有(20)的形式. 则非线性系统(2)有形如(8)的降阶观测器.

证明: 对于任意的 $\vartheta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, y, u)$, $\eta_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m$, 令 $\phi_{ij}(\vartheta) \triangleq \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\eta_i, y, u)$, 则 $\dot{\Phi}_{\vartheta} \triangleq (\phi_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $\dot{\Phi}_{ij}(\vartheta) \triangleq \phi_{ij}(\vartheta) E_{ij}$. 显然

$$\dot{\Phi}_{\vartheta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n \dot{\Phi}_{ij}(\vartheta) \quad (22)$$

根据等式(22)和引理6,对于任意满足 $\tilde{x} =$

$x - \hat{x} = (\overbrace{0, \dots, 0}^{p \uparrow}, \tilde{x}_{p+1}, \tilde{x}_{p+2}, \dots, \tilde{x}_n)^T$ 的 $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 和正定阵 $P = (p_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都存在常数向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in Co(x, \hat{x})$, $\eta_i \neq x, \eta_i \neq \hat{x}$ ($i = 1, \dots, n$) 使得

$$\langle P(\Phi(x, y, u) - \Phi(\hat{x}, y, u)), x - \hat{x} \rangle =$$

$$\langle P \dot{\Phi}_{\vartheta} \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n \tilde{x}^T P \dot{\Phi}_{ij}(\vartheta) \tilde{x} \quad (23)$$

等式(23)也可表示为

$$2 \langle P(\Phi(x, y, u) - \Phi(\hat{x}, y, u)), x - \hat{x} \rangle =$$

$$\tilde{x}^T \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n \phi_{ij}(\vartheta) (PE_{ij} + E_{ji}^T P) \right) \tilde{x} \quad (24)$$

引理3.1 和等式(24)表明对于所有的 $\tilde{x} = (\overbrace{0, \dots, 0}^{p \uparrow}, \tilde{x}_{p+1}, \tilde{x}_{p+2}, \dots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$ 和 $u \in \mathbb{R}^m$.

$$\tilde{x}^T [A - KC]^T P + P[A - KC] \tilde{x} + 2 \langle P \tilde{\Phi}, \tilde{x} \rangle = \tilde{x}^T ((A - KC)^T P + P(A - KC) +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(\vartheta) (PE_{ij} + E_{ji}^T P)) \tilde{x} < 0 \quad (25)$$

根据引理3.2和不等式(25),定理得证类似于引理5的证明,得到了本文另一主要结果:

定理2 考虑满足条件(13)的非线性系统(2). 如果存在增益阵 K 使得下列矩阵不等式(LMI):

$$\text{diag}(F_p(\nu_1), F_p(\nu_2), \dots, F_p(\nu_l)) < 0,$$

存在对称正定解 P , 其中 $\nu_i \in D_B$, $i = 1, 2, \dots, l$, 那么, 有

1) 如果 $C = (I_p \ 0)$, 则非线性系统 (2) 有形如 (8) 的降阶观测器;

2) 如果 $C \neq (I_p \ 0)$ 且 C 是行满秩的, 则非线性系统 (2) 有形如 (9) 的降阶观测器.

注 2 一般情况下, 不等式 (21) 中的 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n v_{ij} (PE_{ij} + E_{ji}P)$ 不一定是正定的. 所以, 如果对于任意矩阵 $K, A - KC$ 不是稳定的, 则文 [5], [6] 和 [20] 的观测器设计方法失效. 而本文提出的设计方法可能会有效.

3 一类 Lipschitz 非线性系统降阶观测器设计中有关不等式 (21) 的几点说明

在本节中, 主要是对于一类 Lipschitz 非线性系统, 将我们提出的方法和文 [20] 中的方法进行比较. 对于这类系统的降阶观测器设计问题, 我们对于条件 (21) 的使用给出了如下评论.

首先, 给出如下结果:

命题 3 考虑满足条件 (3) 的系统 (2). 令 $a_{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) 为矩阵 A 的第 i 个行向量. 如果

1) $C = (I_p \ 0)$;

2) 存在 $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得

$$a_{(i)} = (0, 0, \dots, 0, \overset{\wedge}{\rho}, 0, \dots, 0)^T$$

其中, $|\rho| \leq \gamma$, 则对于任意矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 和正定阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 下列矩阵

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + \gamma^2 PP + I \quad (26)$$

不是负定的. 即不等式 (7) 无解.

证明: 对于 $p+1 \leq i \leq n$, 式 (26) 主对角线的第 i 个元素为

$$2p_{ij}\rho + \gamma^2 \sum_{k=1}^m p_{ik}^2 + 1 \quad (27)$$

如果 $|\rho| \leq \gamma$, 那么

$$2p_{ij}\rho + \gamma^2 \sum_{k=1}^n p_{ik}^2 + 1 \geq \gamma^2 p_{ij}^2 + 2\rho p_{ij} + 1 \geq$$

$$\gamma^2 \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^2 + 2\rho \left(\frac{\rho}{\gamma}\right) + 1 = 1 \frac{\rho^2}{\gamma^2} \geq 0 \quad (28)$$

所以不等式 (7) 不成立.

注 3 (1) 在命题 3 的条件下, 引理 2 失效. 然而, 我们的定理 1 却仍可能有效 (见第 5 节例 5.2).

(2) 在 $C = (I_p \ 0)$ 的情况下, 如果系统 (2) 是 Lipschitz 的并且非线性部分 $\Phi(x, y, u)$ 满足条件 (13),

则 Lipschitz 常数 $\gamma \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=p+1}^n \gamma_{ij}^2}$. 所以, 不等式 (21) 的可解性要优于线性矩阵不等式 (7), 原因在于, 与 γ 相比, 集合 $\{\gamma_j^{(i)}; 1 \leq i \leq n, p+1 \leq j \leq n\}$ 能更好的反映出非线性部分 $\Phi(x, y, u)$ 对 $\tilde{x}_{p+1}, \tilde{x}_{p+2}, \dots, \tilde{x}_n$ 的影响.

4 数值例子

本节我们把所建立的构造观测器的方法用于两个例子中, 下面的这个例子是关于一个非 Lipschitz 系统的降阶观测器设计问题.

例 1 考虑系统 (2) 的参数如下, 如图 1 所示.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0),$$

$$\Phi(x, y, u) = \left(\frac{1}{4} e^{-(\sin^4 x_1^2 \cos^2 x_2)}, 0.03 \sin(x_2 \cos x_1^3) + u \right)^T,$$

$u = \sin t$. 可以看出 $\Phi(x, y, u)$ 是非 Lipschitz 的. 所以, 我们不能利用引理 2 为该系统设计降维观测器. 然而, 该系统满足定理 1 的全部条件. 显然, 如果 $\nu \in D_B$, 则

$$\nu_{12} \in \{-0.25, 0.25\}, \nu_{22} \in \{-0.03, 0.03\}.$$

则线性矩阵不等式 (21) 变为:

$$\text{diag}(F_p(\nu_1), F_p(\nu_2), F_p(\nu_3), F_p(\nu_4)) < 0 \quad (29)$$

其中

$$F_p(\nu_1) = (A - KC)^T P + P(A - KC) - 0.25(PE_{12} + E_{21}P) - 0.03(PE_{22} + E_{22}P),$$

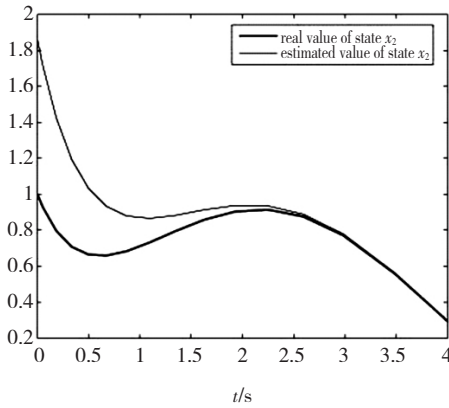
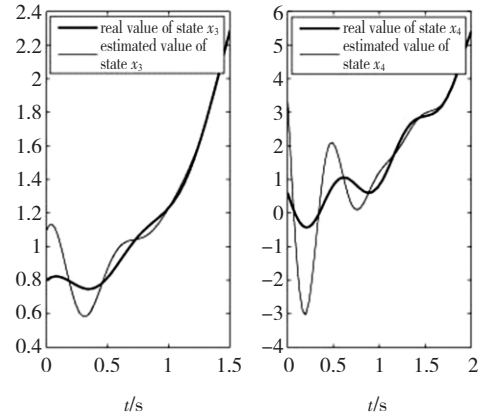
$$F_p(\nu_2) = (A - KC)^T P + P(A - KC) - 0.25(PE_{12} + E_{21}P) + 0.03(PE_{22} + E_{22}P),$$

$$F_p(\nu_3) = (A - KC)^T P + P(A - KC) + 0.25(PE_{12} + E_{21}P) - 0.03(PE_{22} + E_{22}P),$$

$$F_p(\nu_4) = (A - KC)^T P + P(A - KC) + 0.25(PE_{12} + E_{21}P) + 0.03(PE_{22} + E_{22}P).$$

求解线性矩阵不等式 (29), 得到:

$$P = \begin{pmatrix} 1.5809 & 0.1979 \\ 0.1979 & 0.7120 \end{pmatrix}, L = P_3^{-1} P_2^T = 0.2779.$$

图1 状态变量 x_2 仿真曲线, $x_2(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 1.86$ 图2 状态变量 x_3 和 x_4 仿真曲线

例2 考虑文[4]中柔性机器人所描述的的例子. 该系统在(2)的形式下具有如下参数:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x, y, u) = (0, 21.6u, 0, -3.33\sin x_3)^T,$$

$$u = \sin t.$$

显然, $\Phi(x, y, u)$ 是 Lipschitz 的且 Lipschitz 常数为 $\gamma = 3.33$, 而由命题3 知引理2 失效. 现在我们利用定理1 来为此系统设计降阶观测器. 因为当 $\nu \in D_B, \nu_{ij} = 0 (1 \leq i \leq 4; j = 3, 4 \text{ 且 } (i, j) \neq (4, 3))$, $\nu_{43} \in \{-3.33, 3.33\}$, 则线性矩阵不等式(21) 变为

$$\text{diag}(F_P(\nu_1), F_P(\nu_2)) < 0 \quad (30)$$

其中

$$F_P(\nu_1) = (A - KC)^T P + P(A - KC) + 3.33(PE_{43} + E_{34}P),$$

$$F_P(\nu_2) = (A - KC)^T P + P(A - KC) - 3.33(PE_{43} + E_{34}P).$$

解式(30), 有

$$P = \begin{pmatrix} 1.0176 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0176 & 0.0061 & -0.0252 \\ 0 & 0.0061 & 0.9936 & -0.0412 \\ 0 & -0.0252 & -0.0412 & 0.0121 \end{pmatrix}$$

$$L = P_3^{-1} P_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -0.0934 \\ 0 & -2.4007 \end{pmatrix}$$

图2 表示的是状态 x_3 和 x_4 的仿真, 其中初始条件 $x_3(0) = 0.8, \hat{x}_3(0) = 1.1, x_4(0) = 0.6, \hat{x}_4(0) = 3.4$.

5 结 语

本文给出了一类非线性系统降阶观测器设计方法. 该方法不仅可应用在可微 Lipschitz 非线性系统中, 同样也可应用在一类非 Lipschitz 非线性系统中. 本文所提出的线性矩阵不等式的可解性要优于文[20] 中对于一类可微 Lipschitz 非线性系统所给出的线性矩阵不等式. 最后, 为了验证所给观测器的效果, 我们把所提出的方法用于两个实际例子, 结果是非常令人满意的.

参考文献:

- [1] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex Optimization with Engineering Applications, in: Lecture Notes [M]. Stanford University, 2001,
- [2] ARCAK M, KOKOTOVIC P. Nonlinear Observers: A Circle Criterion Design and Robustness analysis [J]. Automatica, 2001, 37: 1923 - 1930.
- [3] BESANCON G, HAMMOURI H. On Uniform Observation of Non-uniformly Observable Systems [J]. Syst. Control Lett., 1996, 29: 9 - 19.
- [4] BESANCON G, HAMMOURI H. Reduced Order Observer for a Class of Nonuniformly Observable Systems [C] // in Proc. 34th Conf. Decision and Control, New Orleans, LA, 1995, 121 - 125.
- [5] DAWSON, D. M. On the State Observation and Output Feedback Problems for Nonlinear Uncertain Dynamic Systems [J]. Syst. Control Lett., 1992, 18: 217 - 222.
- [6] DEKKER K, VERWER J G. Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations [M]. Amsterdam: North - Holland, 1984.
- [7] GAUTHIER J P, HAMMOURI H, OTHMAN S. A Simple Observer for Nonlinear System. Applications to Bioreactors [J]. IEEE Tran. Automat. Control., 1992, 37(6): 875 - 880.

(下转第67页)

其中 $n=2, x^*=(0,0)$

$$(x_0, y_0) = (0.005, 0.05)$$

$$E_0 = F(x_0, y_0), \lambda_k = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}$$

计算结果如表 1 所示.

表 1 计算结果

k	x_k	y_k	λ_k
1	-0.232 6E-03	0.307 2E-01	0.614 312
2	-0.330 9E-05	0.204 5E-01	0.665 807
3	-0.825 7E-06	0.126 3E-01	0.617 432
4	-0.394 7E-07	0.781 4E-02	0.618 723
5	-0.998 7E-08	0.483 3E-03	0.618 476
6	-0.620 7E-09	0.299 7E-03	0.620 132
10	-0.553 1E-11	0.523 7E-06	0.616 478
20	-0.162 9E-16	0.723 9E-10	0.618 274

参 考 文 献:

- [1] DECKER W W, KELLEY C T. Broyden's Method For A Class of Problems Having Singular Jacobian At the Root [J]. SIMA. Numer Anal. 1985, 22: 555-574.
- [2] DECKER D W, KELLER H B and KELLEY C T. Convergence Rates for Newton's Method at Singular Points [J]. this Journal, 1983, 20: 296-314.
- [3] 金重方. 用列修正拟 Newton 法求解奇异问题 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 1990, 24-29.
- [4] 潘状元. 用修正的牛顿法求解奇异问题 [J]. 高等学校计算数学学报, 1988: 240-249.
- [5] 席少霖, 顾 明. 奇异点处的拟 Newton 方法 [J]. 计算数学, 1988, 291-298.

(编辑: 王 萍)

(上接第 63 页)

- [6] HU G D. Observers for One-sided Lipschitz Non-linear Systems [J]. IMA J. Math. Control Inf., 2006, 23: 395-401.
- [7] HU G D. A Note on Observer for One-sided Lipschitz Non-linear Systems [J]. IMA J. Math. Control inf., 2008, 25: 297-303.
- [8] IBRIR S. Circle-criterion Approach to Discrete-time Nonlinear Observer Design [J]. Automatica., 43: 1432-1441.
- [9] KAZANTZIS N, KRAVARIS C. Nonlinear Observers Design using Lyapunov's Auxiliary Theorem [J]. Systems and Control Letters., 1998, 34: 241-247.
- [10] KRENER A J, HEDRICK J K. Linearization by output Injection and Nonlinear Observers [J]. Syst. Control Lett., 1983(3): 47-52.
- [11] KRENER A J, RESPONDEK W. Nonlinear Observers Within-linearizable Error Dynamics [J]. SIAM J. Control Optim., 1985, 23: 197-216.
- [12] RAGHAVAN S, HEDRICK J K. Observer Design for a Class of Nonlinear Systems [J]. Int. J. Control., 1994, 59: 515-528.
- [13] RAJAMANI R. Observer for Lipschitz Nonlinear Systems [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1998, 43: 397-401.
- [14] RAJAMANI R, CHAO Y M. Existence and Design of Observers for Nonlinear Systems: Relation to Distance to Unobservability [J]. Int. J. Control, 1998, 69: 717-731.
- [15] THAU F E. Observing the State of Nonlinear Dynamic Systems [J]. Int. J. Control, 1973, 17: 471-480.
- [16] XU M Y, HU G D, ZHAO Y B. Reduced-order Observer Design for one-sided Lipschitz non-linear Systems [J]. IMA J. Math. Control Inf., 2009, 26: 299-317.
- [17] XIA X H, GAO W. Nonlinear Observer Design by Observer Error Linearization [J]. SIAM J. Control Optim., 2002, 27: 199-216.
- [18] ZHU F, HAN Z. A Note on Observers for Lipschitz Nonlinear Systems [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2002, 47: 1751-1754.
- [19] ZEMOUCHE A, BOUTAYEB M, BARA G I. Observers for a Class of Lipschitz Systems with Extension to H_∞ Performance Analysis [J]. System & Control Letters, 2008, 57: 18-27.

(编辑: 王 萍)